Werkblad 15. Meetkundige constructies

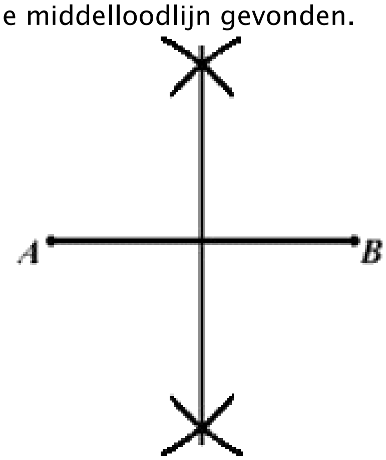
Meer dan 2500 jaar geleden begon een bloeiperiode van allerlei wetenschappen in het oude Griekenland. Eén van de wetenschappers uit die tijd heette Euclides, en leefde rond 300 jaar voor Christus. Zowat alle wiskunde die rond die tijd bekend was heeft Euclides verzameld en opgeschreven in zijn boeken 'de Elementen'. Zodoende heeft hij onder andere de basis gelegd voor de meetkunde zoals je die nu op school leert. Hij bouwde zijn meetkunde systematisch op, met definities, stellingen en bewijzen zoals in de 'moderne' wiskunde gebruikelijk is. Beroemd zijn de postulaten (axioma's, uitgangspunten die zonder vorm van bewijs als waarheid worden aangenomen) die hij in zijn eerste boek formuleerde. Zo stelde hij dat door je twee gegeven punten een rechte lijn kan tekenen en dat je rond elk punt een cirkel kunt tekenen met willekeurige straal. Hoewel hij nog meer postulaten formuleerde, zijn deze twee voor ons belangrijk, omdat zij ons precies zeggen wat toegestaan is bij het maken van meetkundige constructies.

Het gereedschap

Constructies maken doe je met passer en liniaal. De passer gebruik je natuurlijk om een cirkel te tekenen volgens het postulaat van Euclides. De liniaal is eigenlijk een recht stuk hout en mag je alleen gebruiken om een rechte lijn tussen twee punten te tekenen, niet om afstanden te meten. Met dit gereedschap kun je al een heleboel eenvoudige constructies maken. Deze noemen we *elementaire constructies*. Probeer deze maar eens te maken met passer en liniaal.

Elementaire constructies

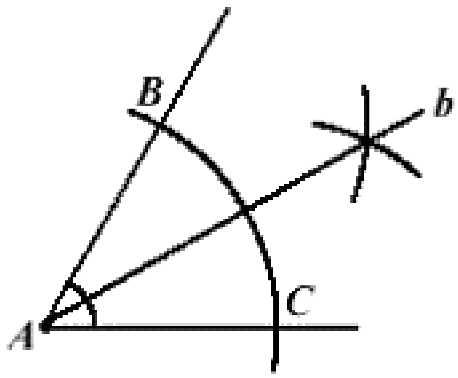
1. De middelloodlijn tussen twee punten.
   De middelloodlijn l van twee punten A en B is de lijn die het lijnstuk AB loodrecht middendoor deelt. Verder is l de verzameling punten die op even grote afstand van A en B liggen. Construeer nu een cirkel met straal groter dan ½$|AB|$ om A en een cirkel met dezelfde straal om B. De snijpunten van deze cirkels hebben dezelfde afstand tot A en B en liggen dus op de middelloodlijn. Teken nu een lijn door deze twee punten en je hebt de middelloodlijn gevonden.



Een middelloodlijn construeren

2. De bissectrice van een hoek

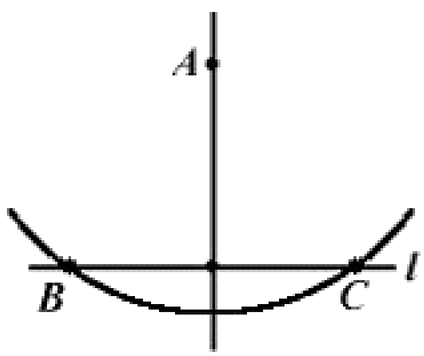
   De bissectrice *b* van een hoek is een halve lijn die de hoek middendoor deelt. De bissectrice is ook de verzameling punten die op even grote afstand van de benen van de hoek liggen. Nu helpt dit je bij het construeren van de bissectrice van een hoek. Teken een cirkel om *A* met willekeurige straal. Deze snijdt de benen van de hoek in *B* en *C*. De middelloodlijn van *B* en *C* is nu de bissectrice van hoek *A*.

   De bissectrice van een hoek

3. Loodlijn oprichten

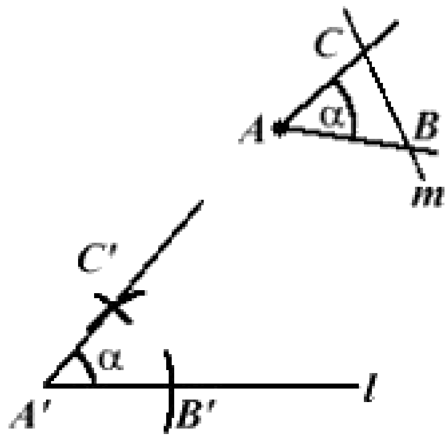
   Gegeven zijn een lijn *l* en een punt *A*. Gevraagd is een lijn door *A* te tekenen die loodrecht op *l* staat. Teken een cirkel om *A*. Deze snijdt *l* in twee punten *B* en *C* en wel zodanig dat $|AB| = |AC|$. Dus de middelloodlijn van *B* en *C* is loodlijn van *l* door *A*.

   Een loodlijn oprichten

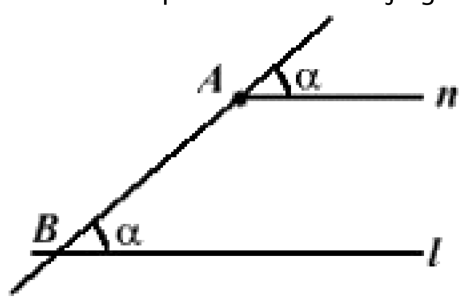
4. Een hoek overbrengen

   Als je twee benen van een willekeurige hoek *A* hebt, kun je deze hoek op overbrengen op een willekeurige lijn *l*. Stel dat je hoek *A* bij punt *A* al getekend hebt, snijd de benen van deze hoek dan met een lijn *m*. Dit geeft je de punten *B* en *C*. Zet nu (met de benen van de passer) de afstand $|AB|$ af op *l* met de punten *A'* en *B'*, en teken een cirkel met straal $|AC|$ om *A'*. Teken een cirkel met straal $|BC|$ om *B'*. Het snijpunt van deze cirkels is *C'* en omdat van de driehoeken *ABC* en *A'B'C'* overeenkomstige zijden gelijk zijn, zijn $\triangle ABC$ en $\triangle A'B'C'$ congruent. Dan zijn ook de overeenkomstige hoeken gelijk, en dus heb je hoek *A* overgebracht naar lijn *l*.



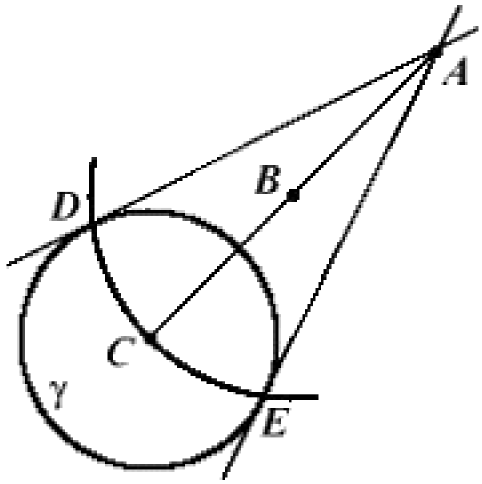
Een hoek overbrengen

5. Een lijn door een punt, evenwijdig aan een gegeven lijn.
   Gegeven zijn de lijn l en een punt A dat niet op l ligt. De bedoeling is een lijn door A te tekenen, die evenwijdig loopt met l, maar je mag je geodriehoek natuurlijk niet gebruiken. Teken nu een willekeurige lijn m door A. Deze moet l snijden in een punt B, anders is hij al evenwijdig met l. Breng nu de hoek • tussen l en m over naar het punt A. Dit kun je al, je hebt immers net die constructie uitgevoerd. Dit geeft je de lijn n. Omdat de hoeken tussen l en m en tussen l en n gelijk zijn heb je te maken met F-hoeken. Zodoende lopen l en n evenwijdig.



Een evenwijdige lijn construeren

6. De raaklijn door een punt aan een cirkel
   Gegeven zijn een cirkel • met zijn middelpunt C en een punt A buiten de cirkel. Hoe teken je nu door het punt A een raaklijn aan de cirkel? Verbind het middelpunt van de cirkel C met A, en deel lijnstuk AC middendoor. (Dit kan natuurlijk met de constructie van de middellood-lijn!) Dit geeft je het punt B. Teken nu een cirkel om B met straal $|BC|$. Deze cirkel snijdt • in twee punten D en E. Dit zijn precies de raakpunten van de lijnen AD en AE met •.



De raaklijn aan een cirkel

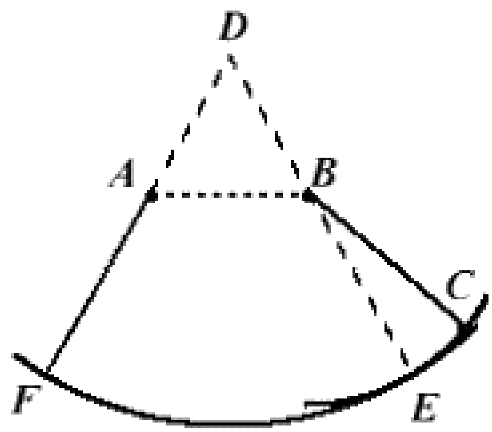
Opgaven

1. Bij de constructie van een lijn evenwijdig aan een andere lijn hebben we gebruik gemaakt van een andere elementaire constructie: het overbrengen van een hoek. Je kunt ook een evenwijdige lijn construeren door enkel gebruik te maken van constructie 3: een loodlijn neerlaten of oprichten. Voer dit uit.
2. Teken twee punten A en B. Construeer nu een gelijkzijdige driehoek ABC.
3. Voor constructie 6 heb je het middelpunt van een cirkel nodig. Hoe construeer je dit middelpunt als enkel de cirkel zelf gegeven is?
4. Een moeilijke opgave: kun je bij de raaklijnconstructie (nr. 6) laten zien dat AD en AE de cirkel · inderdaad raken?

Afstanden overbrengen

Bij de constructie van het overbrengen van een hoek heb je afstanden moeten overzetten. Dit deed je door de afstand tussen de benen van de passer te nemen, de passer op te lichten en op een andere plaats weer neer te zetten. In de tijd van Euclides waren de passers echter niet zo stevig en zodra Euclides zijn passer van de papyrus afhaalde, klapten de benen van de passer in. Hij kon zijn passer dus niet direct gebruiken om een afstand af te passen en deze afstand over te zetten naar een andere plaats. Hoe zette hij dan afstanden over bij die constructie?

Dit probleem kan als volgt geformuleerd worden: gegeven een punt A en een lijnstuk BC, construeer een cirkel om A met straal $|BC|$. Een mogelijke oplossing gaat als volgt: trek een lijnstuk door A en B. Construeer hierop een gelijkzijdige driehoek op de manier van opgave 3. Noem het derde punt van deze driehoek D. Construeer een cirkel met straal $|BC|$ om B, en bepaal de snijpunten van deze cirkel met het verlengde van BD. Kies een van deze snijpunten en noem het E. Teken een cirkel met straal DE om D en bepaal het snijpunt F van deze cirkel met het verlengde van AD. Nu geldt dat $AF = BC$ (Waarom? Ga dit na!) en dus heb je de afstand BC overgezet naar A.



Een afstand overzetten

Omdat je deze constructie altijd kunt uitvoeren, mag je om tijd te besparen met je passer een afstand afpassen en onmiddellijk overzetten. We hebben immers net laten zien dat we elke constructie ook met een inklappende passer kunnen maken. Net zo mag je vanaf nu elke elementaire constructie onmiddellijk uitvoeren. We hebben bijvoorbeeld laten zien hoe je een lijn evenwijdig aan een andere lijn construeert; vanaf nu mag je dit dus gewoon met je geodriehoek uitvoeren.